HANS MAASS

ÜBER DIE FOURIERKOEFFIZIENTEN DER EISENSTEINREIHEN ZWEITEN GRADES

Det Kongelige Danske Videnskabernes Selskab
Matematisk-fysiske Meddelelser **38**, 14

Kommissionær: Munksgaard
København 1972

Synopsis

Die in Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. **34,** no. 7 (1964) vom Verfasser begonnene Analyse der Fourierkoeffizienten $a_k(T)$ der Eisensteinreihen zweiten Grades vom Gewicht k wird fortgesetzt. Es werden Koeffizientenrelationen vom Teilersummentypus begründet, mit denen die Berechnung der Koeffizienten $a_k(T)$ zu nicht-primitiven T auf solche zu primitiven T zurückgeführt wird. Auf Grund multiplikativer Eigenschaften der Fourierkoeffizienten ergeben sich erste Beispiele von Zetafunktionen, die mit Hilfe der Koeffizienten $a_k(T)$ definiert sind und Eulersche Produktentwicklungen besitzen. Ein in der zitierten Arbeit formulierter Satz ererfährt hier eine Berichtigung.

Printed in Denmark
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S
ISBN 87 7304 008 8

„Hans Petersson zum 70. Geburtstag"

In einer älteren Arbeit über »Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten Grades« (Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk. 34, no. 7 (1964)) habe ich für die Fourierkoeffizienten $a_k(T)$ der Eisensteinreihe zweiten Grades

$$G_{-k}(Z) = \sum_{\{C,D\}} |CZ+D|^{-k} \quad (k \equiv 0 (mod\, 2),\ k > 3),$$

wobei über ein volles System von 2-reihigen nicht-assoziierten teilerfremden symmetrischen Matrizenpaaren C, D summiert wird und Z eine symmetrische komplexe Matrix mit positivem Imaginärteil bezeichnet, einige allgemeine Eigenschaften bewiesen. Diese Untersuchung bedarf einer Berichtigung insofern, als Satz 2 loc. cit., wie H. L. Resnikoff und R. L. Saldaña festgestellt haben, unzureichend begründet und zum Teil fehlerhaft ist. Die Elimination des Fehlschlusses in der Beweisführung von Satz 2 bereitet indessen keine Mühe und ergibt das folgende korrigierte Resultat.

Satz: *Es sei* $2\,T = \begin{pmatrix} 2t_0 & t_1 \\ t_1 & 2t_2 \end{pmatrix} > 0,$

$$e = e(T) = \text{g.g.T.}(t_0, t_1, t_2),\ \Delta = \Delta(T) = |2T|.$$

Dann ist $a_k(T)$ durch e und Δ eindeutig bestimmt:

$$a_k(T) = \beta_k(e, \Delta) \tag{1}$$

und es gilt für jede Primzahl $p \geqq 2$:

$$\left.\begin{aligned} \beta_k(pe, p^2\Delta) = {} & \left(1 + p^{k-1} + \left\{\delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2}) - \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right)\right\} p^{k-2} + p^{2k-3}\right)\beta_k(e,\Delta) - \\ & - \left\{p - \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right)\right\} p^{k-2}\beta_k(p^{-1}e, \Delta) - \delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2})p^{k-2}\beta_k(pe,\Delta) - \\ & - p^{2k-3}\beta_k(p^{-1}e, p^{-2}\Delta), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

wobei $\delta_p(x)$ *durch* (5) *erklärt und generell* $\beta_k(e, \Delta) = 0$ *ist, wenn eine der Bedingungen* $e \equiv 0 \pmod 1$, $\Delta e^{-2} \equiv 0$ oder $3 \pmod 4$ *verletzt ist.*

Beweis: Wir schließen mit vollständiger Induktion nach

$$h(T) = \sum_{p \geqq 2} \nu_p,$$

der Exponentensumme zur Primfaktorzerlegung

$$\Delta(T) = \prod_{p \geqq 2} p^{\nu_p}.$$

Ist $h(T) \leqq 1$, so ist notwendig $e(T) = 1$, also T primitiv. Auf Grund von Satz 1 loc. cit. ist dann festzustellen, daß $a_k(T)$ durch Δ eindeutig bestimmt ist. D.h. (1) braucht nur noch für nicht-primitive $T > o$ bewiesen zu werden. Wir nehmen nun an, daß bei gegebenem T bereits

$$a_k(S) = \beta_k(e(S), \Delta(S))$$

gilt, sofern $h(S) \leqq h(T)$ ist. Da $a_k(T)$ gegenüber unimodularen Transformationen $T \to T(U)$ invariant ist, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit T bezüglich p immer so normiert annehmen, daß $t_0(e(T))^{-1}$ zu p prim ist. Wir knüpfen wieder an die allgemeine Beziehung an

$$\left.\begin{aligned} a_k(pT) = (1 + p^{k-1})(1 + p^{k-2})\, a_k(T) - p^{2k-3} a_k\left(\frac{1}{p} T\right) - \\ - p^{k-2} a_k\left(\frac{1}{p} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\right) - p^{k-2} \sum_{U=0}^{p-1} a_k\left(\frac{1}{p} T \begin{bmatrix} u & p \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right), \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

die sich aus der Heckeschen Operatorentheorie ergab. Hier ist $a_k(S) = 0$ zu setzen, falls $e(S)$ nicht ganz ist. Man bestätigt nun gemäß Induktionsschluß, daß

$$a_k(T) = \beta_k(e, \Delta), a_k\left(\frac{1}{p} T\right) = \beta_k(p^{-1} e, p^{-2} \Delta),$$

$$a_k\left(\frac{1}{p} T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p \end{bmatrix}\right) = \beta_k(p^{-1} e, \Delta)$$

ist. Genauer muß nun auf den Fall

$$S = \frac{1}{p} T \begin{bmatrix} u & p \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \Delta(S) = \Delta(T)$$

eingegangen werden. Es sei $2S = \begin{pmatrix} 2s_0 & s_1 \\ s_1 & 2s_2 \end{pmatrix}$ und $e_p(S)$ die größte p-Potenz, welche $e(S)$ teilt, so daß $t_0(e_p(T))^{-1}$ zu p prim ist. Aus

$$s_0 = p^{-1}(t_0 u^2 + t_1 u + t_2), s_1 = 2t_0 u + t_1, s_2 = pt_0$$

entnimmt man die Teilbarkeitsrelationen

$$e_p(T)/pe_p(S) \quad \text{und} \quad e_p(S)/pe_p(T),$$

so daß

$$e_p(S) = p^\nu e_p(T) \quad \text{mit} \quad |\nu| \leqq 1$$

gilt. Zufolge

$$\frac{e(S)}{e_p(S)} = \frac{e(T)}{e_p(T)}$$

ist damit gleichwertig

$$e(S) = p^\nu e(T) \quad \text{mit} \quad |\nu| \leqq 1.$$

Jedenfalls ist also

$$a_k(S) = \beta_k(p^\nu e, \Delta).$$

Der Exponent ν möge, wenn u alle Restklassen mod p durchläuft, genau $A_\nu(T)$ mal vorkommen. Es genügt, $A_\nu(T)$ für $\nu = \pm 1$ zu berechnen. Vermöge

$$\sum_{|\nu| \leqq 1} A_\nu(T) = p$$

ist dann auch $A_0(T)$ bekannt. Wir beginnen mit

1. $\nu = 1$. Wegen der Normierung von T ist $A_1(T)$ die Anzahl der Restklassen u mod p, die das System der Kongruenzen

$$2t_0 u + t_1 \equiv 0 \pmod{pe_p(T)},$$
$$t_0 u^2 + t_1 u + t_2 \equiv 0 \pmod{p^2 e_p(T)}$$

befriedigen. Wir setzen $t_\mu = e_p(T) r_\mu (\mu = 0, 1, 2)$ und erhalten die gekürzten Kongruenzen

$$2r_0 u + r_1 \equiv 0 \pmod{p},$$
$$r_0 u^2 + r_1 u + r_2 \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Damit gleichwertig ist wegen $p \nmid r_0$ das System

$$2r_0 u + r_1 \equiv 0 \pmod{p}, \; (2r_0 u + r_1)^2 \equiv -\Delta_p \pmod{p^{2+\varkappa_p}} \tag{4}$$

mit

$$\Delta_p = 4r_0r_2 - r_1^2 = (e_p(T))^{-2}\Delta(T),$$
$$\varkappa_p = \begin{cases} 2 & \text{für } p = 2, \\ 0 & \text{für } p > 2. \end{cases}$$

Notwendig und hinreichend für die Lösbarkeit von (4) ist

$$\Delta_p \equiv \begin{cases} 0 & (\text{mod } p^2) \quad \text{für } p > 2, \\ 0 \text{ oder } -4 & (\text{mod } 16) \quad \text{für } p = 2, \end{cases}$$

was dasselbe bedeutet wie

$$\Delta e^{-2} \equiv \begin{cases} 0 & (\text{mod } p^2) \quad \text{für } p > 2, \\ 0 \text{ oder } -4 & (\text{mod } 16) \quad \text{für } p = 2. \end{cases}$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so gibt es genau eine Restklasse u mod p, welche (4) befriedigt. Wir setzen

$$\delta_p(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ wenn } \begin{cases} x \equiv 0 & (\text{mod } 1) \quad \text{für } p > 2, \\ x \equiv 0 \text{ oder } 1 & (\text{mod } 4) \quad \text{für } p = 2, \end{cases} \\ 0 \text{ sonst.} \end{array} \right\} \tag{5}$$

Ersichtlich ist dann

$$A_1(T) = \delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2}). \tag{6}$$

2. $\nu = -1$. Wegen $e_p(T)/s_\mu(\mu = 1, 2)$ ist $A_{-1}(T)$ die Anzahl der Restklassen u mod p mit

$$t_0u^2 + t_1u + t_2 \not\equiv 0 \ (\text{mod } pe_p(T))$$

oder

$$r_0u^2 + r_1u + r_2 \not\equiv 0 \ (\text{mod } p),$$

was mit

$$(2r_0u + r_1)^2 \not\equiv -\Delta_p \ (\text{mod } p^{1+\varkappa_p})$$

gleichwertig ist.

Zufolge $p \nmid r_0$ ist Falle $p > 2$ die Funktion $A_{-1}(T)$ auch gleich der Anzahl der Restklassen u mod p mit

$$u^2 \not\equiv -\Delta e^{-2} \ (\text{mod } p).$$

Eine Abzählung liefert

$$A_{-1}(T) = p - 1 - \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right) \quad \text{für} \quad p > 2. \tag{7}$$

Im Falle $p = 2$ wird

$$(2r_0u + r_1)^2 \not\equiv -\Delta_2 \pmod 8$$

gefordert.

a) $r_1 \equiv 0 \pmod 2$ ergibt

$$r_0u + \frac{r_1}{2} \equiv \left(r_0u + \frac{r_1}{2}\right)^2 \not\equiv -\frac{\Delta_2}{4} \pmod 2,$$

mithin $A_{-1}(T) = 1$. Der vorliegende Fall ist gekennzeichnet durch

$$\Delta_2 \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow \Delta e^{-2} \equiv 0 \pmod 4 \Leftrightarrow \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{2}\right) = 0.$$

b) $r_1 \equiv 1 \pmod 2$ ergibt für alle u die Bedingung

$$1 \equiv (2r_0u + r_1)^2 \not\equiv -4r_0r_2 + 1 \pmod 8,$$

also $A_{-1}(T) = 2$ bzw. 0, falls $r_0r_2 \equiv 1$ bzw. $0 \pmod 2$. Im vorliegenden Fall ist $A_{-1}(T) > 0$ genau dann, wenn

$$\Delta_2 \equiv 3 \pmod 8 \Leftrightarrow \Delta e^{-2} \equiv 3 \pmod 8 \Leftrightarrow \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{2}\right) = -1.$$

Zusammenfassend stellen wir nun fest, daß (7) auch für $p = 2$ gilt.

Damit ergibt sich schließlich

$$A_0(T) = 1 + \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right) - \delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2}).$$

Die Relation (3) läßt sich jetzt umschreiben in

$$a_k(pT) = \left(1 + p^{k-1} + \left\{\delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2}) - \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right)\right\}p^{k-2} + p^{2k-3}\right)\beta_k(e, \Delta) -$$
$$-\left\{p - \left(\frac{-\Delta e^{-2}}{p}\right)\right\}p^{k-2}\beta_k(p^{-1}e, \Delta) - \delta_p(-\Delta e^{-2}p^{-2})p^{k-2}\beta_k(pe, \Delta) -$$
$$- p^{2k-3}\beta_k(p^{-1}e, p^{-2}\Delta).$$

Hieraus ist ersichtlich, daß $a_k(pT)$ durch

$$e(pT) = pe \quad \text{und} \quad \Delta(pT) = p^2\Delta$$

eindeutig bestimmt ist, so daß nun auch

$$a_k(pT) = \beta_k(pe, p^2\Delta)$$

gesetzt werden kann. Damit ist der Induktionsbeweis für den formulierten Satz erbracht.

Mit vollständiger Induktion nach $h(T)$ beweist man schließlich

$$\beta_k(e,\Delta) = \sum_{\substack{t^2/\Delta \\ t>0}} b_k(e,\Delta,t)\beta_k(1,\Delta t^{-2})$$

mit gewissen ganz rationalen Koeffizienten $b_k(e, \Delta, t)$. Die übrigen Sätze der ursprünglichen Arbeit behalten also ihre Gültigkeit.

Die festgestellten Eigenschaften der Fourierkoeffizienten $a_k(T) = \beta_k(e,\Delta)$ gestatten nunmehr, die tiefer liegende Relation

$$\beta_k(e,\Delta) = \sum_{0<t/e} t^{k-1}\beta_k(1,\Delta t^{-2}) \tag{8}$$

zu beweisen, die R. L. Saldaña auf Grund umfangreicher Koeffiziententabellen in seiner Master's Dissertation »The Fourier coefficients of Siegel modular forms of degree two« (Rice University, Houston, Texas, January 1971) als Vermutung formuliert hat. Meiner ursprünglichen Arbeit kann für $\beta_k(1,\Delta)$ mit $\Delta \equiv 0$ oder 3 (mod 4), $\Delta > 0$ noch folgende Darstellung entnommen werden: Es sei $d = d(\Delta)$ die Diskriminante des imaginär-quadratischen Zahlkörpers $Q(\sqrt{-\Delta})$, p^b die höchste Potenz der Primzahl p, welche Δ teilt, und $j = \left[\frac{b-1}{2}\right]$ oder $\left[\frac{b-2}{2}\right]$, je nachdem $p > 2$ oder $p = 2$ ist. Mit einer nur von d abhängigen Zahl $\omega_k(d)$ ist dann

$$\left.\begin{aligned} \beta_k(1,\Delta) &= \omega_k(d)b_k(\Delta), \\ b_k(\Delta) &= \left(\frac{\Delta}{|d|}\right)^{k-\frac{3}{2}} \prod_{p/2\Delta}\left(\left\{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}\right\}\sum_{\mu=0}^{j} p^{\mu(3-2k)} + \left(\frac{d}{p}\right)^2 p^{(j+1)(3-2k)}\right). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Der Beweis für (8) wird mit vollständiger Induktion nach $\nu = \nu(e) = \sum_p \nu_p$, der Exponentensumme zur Primfaktorzerlegung $e = \prod_p p^{\nu_p}$, geführt. Für $\nu = 0$ ist nichts zu beweisen. Sei also $\nu > 0$ und (8) richtig für Exponentensummen kleiner als ν. Wir wählen eine Primzahl p mit $e = p^h e_1$, $p \nmid e_1$, $h > 0$ und setzen $\Delta = e^2 D = p^{2h} e_1^{\,2} D$. Der Induktionsschluß erlaubt den Ansatz

$$\beta_k(e_1,\Delta) = \sum_{0<t/e_1} t^{k-1}\beta_k(1,\Delta t^{-2}),$$

$$\beta_k(ep^{-1},\Delta p^{-2}) = \sum_{0<t/ep^{-1}} t^{k-1}\beta_k(1,\Delta(pt)^{-2}).$$

Gleichwertig mit (8) erweist sich somit

$$\beta_k(p^h e_1, p^{2h} e_1^2 D) = \beta_k(e_1, p^{2h} e_1^2 D) + p^{k-1}\beta_k(p^{h-1} e_1, p^{2(h-1)} e_1^2 D), \qquad (10)_h$$

was nun im Rahmen der vollständigen Induktion nach ν durch vollständige Induktion nach h bewiesen wird.

Wir beginnen mit der Betrachtung des Falles $h = 1$. Auf Grund von (2) erweist sich

$$\beta_k(pe_1, p^2 e_1^2 D) = \beta_k(e_1, p^2 e_1^2 D) + p^{k-1}\beta_k(e_1, e_1^2 D) \qquad (10)_1$$

als gleichwertig mit

$$\left.\begin{aligned} &\left(1 + \left\{\delta_p(-Dp^{-2}) - \left(\frac{-D}{p}\right)\right\} p^{k-2} + p^{2k-3}\right)\beta_k(e_1, e_1^2 D) - \\ &\qquad - \delta_p(-Dp^{-2})\beta_k(pe_1, e_1^2 D) = \beta_k(e_1, p^2 e_1^2 D). \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Es sei p^b die höchste p-Potenz, welche D teilt. Zur Verdeutlichung werde $(11)_b$ an Stelle von (11) geschrieben. Der Beweis für $(11)_b$ wird nun mit einer dritten (und letzten) Induktion, nämlich vollständiger Induktion nach b erbracht. Die Gleichung

$$\left(1 - \left(\frac{-D}{p}\right)p^{k-2} + p^{2k-3}\right)\beta_k(e_1, e_1^2 D) = \beta_k(e_1, p^2 e_1^2 D) \qquad (11)_0$$

ist gemäß (8) eine unmittelbare Folge der Relationen

$$\left(1 - \left(\frac{-D}{p}\right)p^{k-2} + p^{2k-3}\right)\beta_k(1, e_1^2 t^{-2} D) = \beta_k(1, p^2 e_1^2 t^{-2} D) \quad \text{für } t/e_1,$$

die auf Grund von (9) als richtig erkannt werden können. Damit ist $(11)_0$ beweisen. Die folgende Relation

$$(1 + p^{2k-3})\beta_k(e_1, e_1^2 D) = \beta_k(e_1, p^2 e_1^2 D) \qquad (11)_1$$

wird analog auf die Beziehungen

$$(1 + p^{2k-3})\beta_k(1, e_1^2 t^{-2} D) = \beta_k(1, p^2 e_1^2 t^{-2} D) \quad \text{für } t/e_1$$

zurückgeführt, die ebenfalls mit Hilfe von (9) zu beweisen sind, wobei zu beachten ist, daß $b = 1$ notwendig $p > 2$ zur Folge hat.

Wir setzen nun voraus, daß $b \geqq 2$ und $(11)_{b-2}$ oder, gleichwertig damit,

$$\beta_k(pe_1, e_1^2 D) = \beta_k(e_1, e_1^2 D) + p^{k-1}\beta_k(e_1, e_1^2 D)$$

gültig ist. Damit reduziert sich

$$\left.\begin{aligned}&(1+\delta_p(-Dp^{-2})p^{k-2}+p^{2k-3})\beta_k(e_1,e_1^2D)-\\&-\delta_p(-Dp^{-2})\beta_k(pe_1,e_1^2D)=\beta_k(e_1,p^2e_1^2D)\,(b\geqq 2)\end{aligned}\right\}\quad(11)_{\mathrm{b}}$$

auf

$$\beta_k(e_1,p^2e_1^2D)=(1+p^{2k-3})\beta_k(e_1,e_1^2D)-\delta_p(-Dp^{-2})p^{2k-3}\beta_k(e_1,e_1^2p^{-2}D).$$

Mit Hilfe von (8) läßt sich diese Beziehung auf den Fall $e_1 = 1$ zurückführen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann also vorübergehend $e_1 = 1$ gesetzt werden. Wir brauchen dann nur noch

$$\beta_k(1,p^2D)=(1+p^{2k-3})\beta_k(1,D)-\delta_p(-Dp^{-2})p^{2k-3}\beta_k(1,p^{-2}D)\qquad(12)$$

zu bestätigen, was mit Hilfe von (9) ohne weiteres möglich ist, wenn man folgendes beachtet: Es ist

$$d(D)=d(p^2D)=d(p^{-2}D),$$

und $b_k(D)$, $b_k(p^2D)$, $b_k(p^{-2}D)$ unterscheiden sich nur in den p-Faktoren. Demnach ist

$$\left.\begin{aligned}&p^{2k-3}\left(\left\{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}\right\}\sum_{\mu=0}^{j+1}p^{\mu(3-2k)}+\left(\frac{d}{p}\right)^2p^{(j+2)(3-2k)}\right)=\\&=(1+p^{2k-3})\left(\left\{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}\right\}\sum_{\mu=0}^{j}p^{\mu(3-2k)}+\left(\frac{d}{p}\right)^2p^{(j+1)(3-2k)}\right)-\\&-\delta_p(-Dp^{-2})\left(\left\{1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}\right\}\sum_{\mu=0}^{j-1}p^{\mu(3-2k)}+\left(\frac{d}{p}\right)^2p^{j(3-2k)}\right)\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

zu prüfen, wobei $j=\left[\frac{b-1}{2}\right]$ oder $\left[\frac{b-2}{2}\right]$, je nachdem $p>2$ oder $p=2$ ist. Nun ist $\delta_p(-Dp^{-2})=1$ mit Ausnahme des Falles $p=2$, $-D\equiv 8$ oder12 (mod 16), der $b=2$ oder 3, mithin $j=0$ und zudem $\left(\frac{d}{2}\right)=0$ nach sich zieht, woraus die Gültigkeit von (13) erhellt. Der Beweis für $(10)_1$ ist damit erbracht.

Wir beweisen $(10)_{\mathrm{h}}$ für $h\geqq 2$, indem wir für den Term auf der linken Seite sowie den zweiten Term auf der rechten Seite von $(10)_{\mathrm{h}}$ die durch (2) gegebenen Darstellungen eintragen. Mit Hilfe von $(10)_{\mathrm{h-1}}$ und $(10)_{\mathrm{h-2}}$, sofern $h\geqq 3$ ist, führen wir die so erhaltene Relation über in

$$\left.\begin{aligned}&\beta_k(e_1,p^{2h}e_1D)=\\&(1+p^{2k-3})\beta_k(e_1,p^{2(h-1)}e_1^2D)-p^{2k-3}\beta_k(e_1,p^{2(h-2)}e_1^2D)\,(h\geqq 2).\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

Die Reduktion auf den Fall $e_1 = 1$ erfolgt nach mehrmals angewendetem Verfahren mit Hilfe von (8). Die Gleichung $(10)_h$ für $h \geqq 2$ erweist sich somit gleichwertig mit der Relation

$$\beta_k(1, p^{2h} D) = (1 + p^{2k-3})\beta_k(1, p^{2(h-1)} D) - p^{2k-3}\beta_k(1, p^{2(h-2)} D)\ (h \geqq 2), \quad (15)$$

die sich mit Hilfe von (9) in analoger Weise verifizieren läßt wie die Relation (12). Mit $(10)_h$ ist schließlich auch (8), das Ziel unserer Ausführungen, bewiesen.

Schließlich sei noch auf den multiplikativen Charakter der in (9) definierten Zahlfunktion $b_k(\Delta)$ hingewiesen: Für Diskriminanten d imaginär-quadratischer Zahlkörper gilt

$$b_k(e_1^2 e_2^2 |d|) = b_k(e_1^2 |d|) b_k(e_2^2 |d|), \text{ falls } (e_1, e_2) = 1 \quad (16)$$

ist. Man braucht sich nur klar zu machen, daß der p-Beitrag in der Produktdarstellung von $b_k(e^2|d|)$ bei gegebener Diskriminante d nur von der höchsten Potenz von p abhängt, welche e teilt, und daß $b_k(|d|) = 1$ ist. Zufolge

$$\beta_k(1, e^2|d|) = \omega_k(d) b_k(e^2|d|) = \beta_k(1, |d|)\, b_k(e^2|d|)$$

erweist sich daher der Quotient

$$\chi(e) = \frac{\beta_k(1, e^2|d|)}{\beta_k(1, |d|)}$$

als multiplikativ:

$$\chi(e_1 e_2) = \chi(e_1)\chi(e_2) \quad \text{für} \quad (e_1, e_2) = 1,$$

womit eine weitere Vermutung von R. L. Saldaña verifiziert ist.

Äquivalent mit (8) ist im Falle $\Delta = |d|$ die Identität

$$\zeta_k^*(s, d) = \zeta(s + 1 - k)\zeta_k(s, d), \quad (17)$$

wobei

$$\zeta_k(s, d) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_k(1, n^2|d|) n^{-s}, \zeta_k^*(s, d) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_k(n, n^2|d|) n^{-s} \quad (18)$$

und $\zeta(s)$ die Riemannsche Zetafunktion ist. Die erste dieser Funktionen gestattet vermöge (16) die Produktdarstellung

$$\zeta_k(s, d) = \beta_k(1, |d|) \prod_p \sum_{\nu=0}^{\infty} b_k(p^{2\nu}|d|) p^{-\nu s},$$

wobei p alle Primzahlen durchläuft. Die Berechnung der p-Faktoren in diesem Produkt führt zu einem überraschend einfachen Ergebnis. Es sei

p^b die höchste Potenz von p welche d teilt, und $j = \left[\frac{b-1}{2}\right]$ oder $\left[\frac{b-2}{2}\right]$, je nachdem $p > 2$ oder $p = 2$ ist. Dann gilt

$$b_k(p^{2\nu}|d|) = p^{\nu(2k-3)}\left(\left\{1 - \left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}\right\}\sum_{\mu=0}^{j+\nu} p^{\mu(3-2k)} + \left(\frac{d}{p}\right)^2 p^{(j+\nu+1)(3-2k)}\right).$$

Nach Aufsummierung aller auftretenden geometrischen Reihen ergibt sich

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} b_k(p^{2\nu}|d|)p^{-\nu s}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{d}{p}\right)p^{1-k}}{1 - p^{3-2k}}\left\{\frac{1}{1 - p^{-s+2k-3}} - \frac{p^{(j+1)(3-2k)}}{1 - p^{-s}}\right\} + \left(\frac{d}{p}\right)^2 \frac{p^{(j+1)(3-2k)}}{1 - p^{-s}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{d}{p}\right)p^{-s+k-2}}{(1 - p^{-s})(1 - p^{-s+2k-3})}$$

ausnahmslos für alle Primzahlen p, mithin

$$\zeta_k(s,d) = \beta_k(1,|d|)\frac{\zeta(s)\,\zeta(s+3-2k)}{L\left(s+2-k,\left(\frac{d}{*}\right)\right)}, \tag{19}$$

wobei $L\left(s,\left(\frac{d}{*}\right)\right)$ die L-Reihe zum Charakter $\left(\frac{d}{*}\right)$ mod d bezeichnet. Damit haben wir das erste Beispiel einer Zetafunktion, die mit Hilfe von Fourierkoeffizienten einer Modulform zweiten Grades definiert ist und die eine Eulersche Produktentwicklung besitzt.

Hinsichtlich der Frage nach den Eulerprodukten, die den Modulformen höheren Grades zugeordnet werden können, eröffnen sich hier neue Perspektiven.

Zusatz bei der Korrektur:

Auf die von A. N. Andrianov in Trudy mat. Inst. Steklov 112,73–94 (1971) in russischer Sprache publizierte Arbeit mit ihren weitreichenden Ergebnissen sei hier nachdrücklich hingewiesen. Ein Autorreferat in englischer Sprache unter dem deutschen Titel ,,Dirichletreihen mit Eulerschem Produkt in der Theorie der Siegelschen Modulformen zweiten Grades'' findet man im Zbl. für Math. 224 unter Nr. 10027. Ich wurde auf diese ideenreiche Arbeit, in der Probleme gelöst werden, die seit Jahrzehnten anstehen, durch das angegebene Referat aufmerksam.

Indleveret til Selskabet den 7. april 1972.
Færdig fra trykkeriet den 9. oktober 1972.